Vežba 2: Određivanje parametara Gausovog snopa

Teorija

Normalni modovi laserskih rezonatora sa vrlo velikim aperturama su proizvodi Ermitovih (Hermite) polinoma i Gausovih (Gauss) funkcija. Osnovni mod laserskog rezonatora je čisto Gausov snop, jer je Ermitov polinom najnižeg reda jednak jedinici.

Rešavanjem talasne jednačine dobija se izraz za električno polje osnovnog TEM_{00} moda:

$$E(x,y,z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-r^2/w^2(z)} \; e^{-j[kz - \mathrm{arctg}(z/z_0)]} \; e^{-j\frac{kr^2}{2R(z)}}, \tag{1}$$

gde je

$$R(z) = z\left[1 + (z_0/z)^2\right], \tag{2}$$

$$w^2(z) = w_0^2\left[1 + (z/z_0)^2\right], \tag{3}$$

$$z_0 = \frac{\pi n w_0^2}{\lambda} \; . \tag{4}$$

Intenzitet talasnog vektora označen je sa $k=n\omega/c=2\pi n/\lambda$, gde je n indeks prelamanja materijala kroz koji se snop prostire, ω ugaona učestanost, λ talasna dužina, a c brzina svetlosti u vakuumu. Iz jednačine (1) vidi se da amplituda polja brzo opada sa r i da za z=0 na rastojanju $w_0=(2z_0/k)^{1/2}$ od z ose opada na 1/e svoje vrednosti na osi snopa (r=0). Veličina w_0 predstavlja karakterističnu dimenziju snopa. Prvi član u (1) opisuje amplitudu polja u funkciji radijalne i longitudinalne koordinate:

$$\left|E(x,y,z)\right| = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-r^2/w^2(z)} \; . \tag{5}$$

Na udaljenosti r=w amplituda opada na 1/e svoje vrednosti za r=0. Kako se snop prostire duž z ose veličina tačke (*spot size*) raste. Kada je $z=z_0$ snop se širi za faktor $2^{1/2}$ u odnosu na svoju minimalnu vrednost w_0. Snop je najuži za z=0 (tako je izabran koordinatni početak z ose) i minimalna širina snopa iznosi $2w_0$. Intenzitet svetlosti (koji odgovara fotonskom fluksu) dat je kao

$$I(r) = \mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{2}EH^*\right) = I_0(z)e^{-2r^2/w^2(z)} \quad . \tag{6}$$

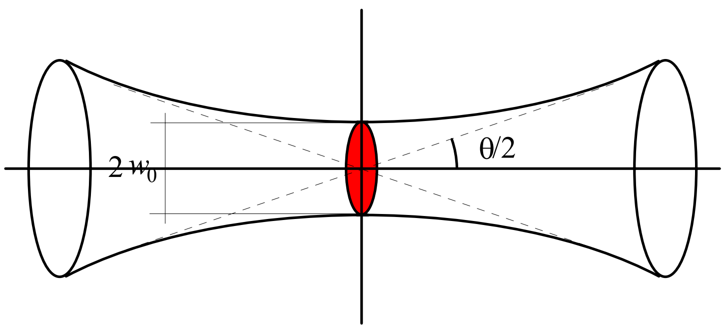
Za velike vrednosti z važi sledeća aproksimacija:

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\left(z/z_0\right)^2} \approx w_0\frac{z}{z_0} = \frac{\lambda_0}{\pi n w_0}z \quad . \tag{7}$$

Odavde je lako dobiti asimptotski ugao širenja snopa θ:

$$\tan(\theta/2) \cong \theta/2 = \frac{dw}{dz} = \frac{\lambda}{\pi n w_0} \tag{8}$$

Na Sl.1 prikazano je širenje snopa TEM_{00} moda.



Sl.1. Širenje TEM_{00} moda.

Drugi faktor u (1), tzv. longitudinalni fazni faktor, pokazuje promenu faze talasa u smeru prostiranja

$$\varphi = kz - \mathrm{arctg}(z/z_0) \quad , \tag{9}$$

gde je k talasni broj uniformnog ravanskog talasa nω/c. Prema tome fazna brzina Gausovog snopa je bliska, ali ipak nešto veća od fazne brzine ravanskog talasa u uniformnoj sredini indeksa prelamanja n. Fazna brzina je definisana sa:

$$v^{(p)} = \frac{1}{\left|\mathrm{grad}(\varphi(r)/\omega)\right|} \quad . \tag{10}$$

Za brzinu prostiranja faze u z pravcu dobija se

$$v^{(p)} = \frac{1}{\left|\frac{\varphi}{\omega z}\right|} = \frac{c/n}{1 - \frac{\mathrm{arctg}(z/z_0)}{kz}} \rangle \frac{c}{n} \quad . \tag{11}$$

Poslednji faktor u (1) (radijalni fazni faktor)

$$e^{-j\frac{kr^2}{2R(z)}}$$

ukazuje da ravan z=const nije ekvifazna površina. Udaljavanjem od ose z, lokalno polje kasni u odnosu na polje na r=0 (smatrajući R(z) pozitivnim). Očigledno, fazni front je zakrivljen. Ekvifazne površine su sferne sa poluprečnikom krivine R(z).

Polje sfernog talasa je

$$E \propto \frac{1}{R} e^{-jkR} \quad , \tag{12}$$

gde je $R=(r^2+z^2)^{1/2}$. Na udaljenostima od koordinatnog početka koje su velike u odnosu na udaljenosti od ose z važi

$$R = z\left(1 + \frac{r^2}{z^2}\right)^{1/2} \cong z + \frac{r^2}{2z} \cong z + \frac{r^2}{2R} \quad . \tag{13}$$

Odavde sledi da se faza u blizini z ose menja na sledeći način

$$E \cong \frac{1}{R}\, e^{-jkz}\, e^{-j\frac{kr^2}{2R}} \quad . \tag{14}$$

Poslednji član ima isti oblik kao i radijalni fazni faktor u (1), međutim u slučaju Gausovog snopa, centar krivine talasa se menja. Iz izraza (2) za R(z) vidi se da samo ako je z mnogo veće od z_0 izgleda kao da je centar krivine u z=0. Približavanjem koordinatnom početku poluprečnik krivine raste i za z=0 postaje beskonačan. Postoje dakle dve alternativne ali ekvivalentne definicije ravni *z*=0: ravan u kojoj je veličina svetlog spota najmanja, i ravan u kojoj je talasni front planaran.

Zadatak vežbe

Sve karakteristike Gausovog snopa - širina snopa, poluprečnik krivine talasnog fronta, njegova amplituda i faza u proizvoljnoj tački (x, y, z), određeni su u potpunosti ako je poznat položaj struka snopa (z=0) i dijametar snopa u struku $2w_0$.

Gausovi snopovi su karakteristični modovi laserskih rezonatora. Mod šupljine je raspodela polja koja reprodukuje samu sebe po relativnom obliku i fazi posle kružnog puta kroz rezonator. Često je potrebno znati parametre snopa koji napušta laser da bi se snop mogao kolimisati, fokusirati, uvesti u dielektrični talasovod ili transformisati na neki drugi način. Koordinatni početak je izabran tako da snop ima minimalni dijametar (definicija struka) za z=0, gde je talasni front ravan, odnosno poluprečnik krivine talasnog fronta je beskonačan.

Zadatak vežbe:

(a) Snimiti profil Gausovog snopa u 20 tačaka na mestima z_1 i z_2.

(b) Nacrtati zavisnost I(r) i sa grafika odrediti radijuse snopa.

(c) Svesti izraz za intenzitet I(r) na linearnu formu i odrediti radijus snopa metodom najmanjih kvadrata.

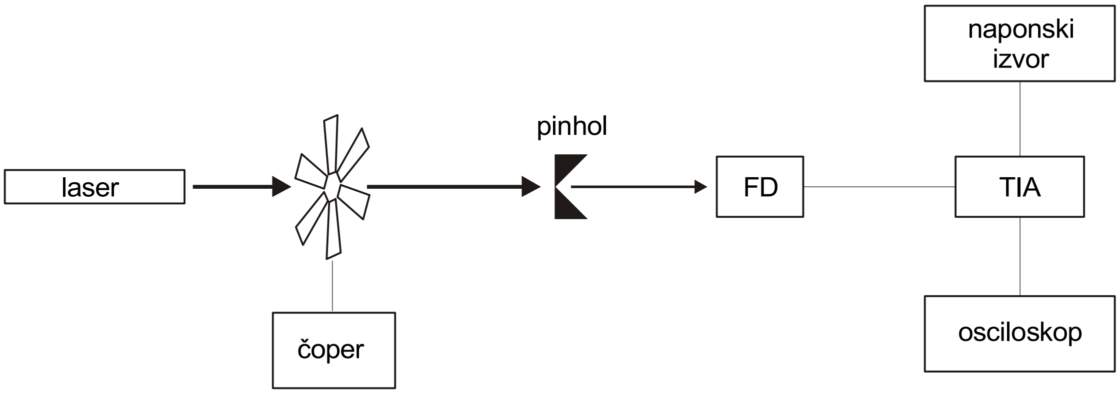
(d) Odrediti položaj struka z=0, dijametar struka $2w_0$ i ugao divergencije snopa θ.

Postavka vežbe i postupak merenja

Helijum-neonski laser (λ=632.8 nm) generiše snop čije parametre treba odrediti (Sl.2). Optički čoper (CH) moduliše snop tako da se signal koji detektuje P-i-N fotodioda (PD) može lakše odvojiti od jednosmernog signala koji je posledica zračenja pozadine. Ispred detektora nalazi se kružni otvor (PH) dijametra 25 do 50 μm postavljen u troosni mikrometar. Otvor se pomera u x i y pravcu da bi se odredio položaj u kome je signal maksimalan. Ovaj položaj odgovara tački na osi snopa (x=0, y=0). Zatim se otvor pomera u x ili y pravcu i snima zavisnost

$$I(r) = I_0 \exp\left[-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right].$$

Parametar w(z), radijus Gausovog snopa, je rastojanje na kome intenzitet opada na $1/e^2$ ili 0.135 od njegove vrednosti na osi. Zavisnost I(r) treba snimiti na dva rastojanja z od struka snopa, z_1 i z_2. Sa grafika se mogu odrediti radijusi snopa $w_1=w(z_1)$ i $w_2=w(z_2)$. S obzirom da se na optičkom stolu ova rastojanja očitavaju u odnosu na koordinatni početak linearnog pozicionera, to se označavaju sa z'_1 i z'_2.



Sl.2. Skica aparature (FD-fotodioda, TIA-transimpedansni pojačavač)

Neka je $\Delta z = z'_2 - z'_1$. Tada za rastojanja u odnosu na koordinatni početak vezan za struk lasera važi sledeće:

$$z_2 = z_1 + \Delta z \quad . \tag{15}$$

Iz jednačine (3) se nalazi da je

$$z_1 = \frac{\pi}{\lambda} w_0 \sqrt{w_1^2 - w_0^2} \quad , \tag{16}$$

$$z_2 = \frac{\pi}{\lambda} w_0 \sqrt{w_2^2 - w_0^2} \quad . \tag{17}$$

Rešavanjem sistema jednačina (15), (16) i (17) dobija se širina struka lasera:

$$w_0^2 = \frac{(\lambda^2/\pi^2)\Delta z^2 \left[w_1^2 + w_2^2 + 2\sqrt{w_1^2 w_2^2 - (\lambda^2/\pi^2)\Delta z^2} \right]}{(w_1^2 - w_2^2)^2 + 4(\lambda^2/\pi^2)\Delta z^2} \quad . \tag{18}$$

Kada je w_0 određeno iz (18) lako je dobiti rastojanje od prvog mesta na kome je sniman prvi Gausov profil do struka lasera z_1 na osnovu jednačine (16), kojim je zapravo određen položaj struka lasera. Na kraju, ugao divergencije snopa izračunava se prema jednačini (8).